ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

oOo

TRẦN THIỆN KHẢI

ÁP DỤNG CỦA TÍNH KHẢ VI SUY RỘNG TRONG MỘT SỐ DẠNG BÀI TOÁN TỐI ƯU HÓA

Ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 9460112

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ

TP. Hồ Chí Minh – 2024

Công trình được hoàn thành tại: Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh

Người hướng dẫn khoa học:

1. HD Chính: PGS.TS. Lê Thanh Tùng
2. HD Phụ: PGS.TS. Nguyễn Lê Hoàng Anh

Phản biện 1: PGS.TS. Nguyễn Đình Huy
Phản biện 2: PGS.TS. Trần Quốc Duy
Phản biện 3: PGS.TS. Nguyễn Trung Kiên
Phản biện độc lập 1: PGS.TS. Lê Thị Phương Ngọc
Phản biện độc lập 2: PGS.TS. Trần Quốc Duy

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp cơ sở đào tạo họp tại Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, vào hồi ... giờ ... phút, ngày ... tháng ... năm 2024

Có thể tìm hiểu luận án tại thư viện:
- Thư viện Khoa học Tổng hợp TP.HCM
- Thư viện Đại học Quốc gia TP.HCM
- Thư viện Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG-HCM

MỤC LỤC

Chương 1.

Mở đầu

Nghiên cứu về đối ngẫu và các điều kiện tối ưu của các bài toán tối ưu hóa và các bài toán liên quan là một trong các chủ đề quan trọng trong Lý thuyết tối ưu. Các dạng đạo hàm và đạo hàm suy rộng được sử dụng trong các dạng bài toán đối ngẫu cung cấp các điều kiện để kiểm tra nghiệm tối ưu của bài toán gốc cũng như đưa ra các giá trị cận trên cho giá trị hàm mục tiêu của bài toán gốc, hỗ trợ cho việc xây dựng các thuật toán tìm nghiệm. Các dạng đạo hàm và đạo hàm suy rộng cũng được dùng để thiết lập các điều kiện tối ưu, qua đó cung cấp các thông tin cần thiết để kiểm tra một điểm chấp nhận được là nghiệm, hỗ trợ việc giải các bài toán tối ưu hóa và các bài toán liên quan cũng như các điều kiện dừng trong các thuật toán tìm nghiệm.

Trong Chương 4 của luận án, dựa trên khái niệm trên đạo hàm tiếp tuyến cấp cao của các ánh xạ đa trị, chúng tôi thảo luận tính đối ngẫu cho bài toán tối ưu đa trị với ràng buộc hỗn hợp. Một số kết quả thu được cải thiện những kết quả hiện có trong các tài liệu được nêu.

Trong Chương 5, chúng tôi nghiên cứu một dạng quan trọng trong lớp các bài toán tối ưu hóa với tên gọi là bài toán tối ưu đa mục tiêu nửa vô hạn với ràng buộc biến mất. Chúng tôi thiết lập cả hai mô hình đối ngẫu Lagrange dạng vectơ và đối ngẫu Lagrange dạng vô hướng hóa của bài toán tối ưu đa mục tiêu nửa vô hạn với ràng buộc biến mất để tìm các mối quan hệ đối ngẫu mạnh và đối ngẫu yếu giữa bài toán gốc với bài toán đối ngẫu của chúng. Hơn nữa, chúng tôi khảo sát và thu được một vài quan hệ đối ngẫu dưới các giả thiết lồi. Đối với mỗi mô hình, chúng tôi xem xét các mối quan hệ giữa tính đối ngẫu mạnh và điều kiện tối ưu điểm yên ngựa cho bài toán này.

Trong Chương 6 của luận án, chúng tôi thiết lập cả hai dạng gốc và dạng đối ngẫu các điều kiện cần tối ưu cấp hai cho bài toán này bằng cách sử dụng các định tính ràng buộc cấp hai dạng Abadie. Sau đó, chúng tôi cũng đề xuất cả hai dạng gốc và đối ngẫu của các điều kiện đủ tối ưu cấp hai cho bài toán. Hơn nữa, chúng tôi cũng xét nón tiếp tuyến chiếu cấp hai bao gồm cả tập tiếp tuyến cấp hai và nón tiệm cận cấp hai trong các định tính ràng buộc cấp hai.

Chương 2.

Giới thiệu tổng quan về hướng nghiên cứu

Gần đây, nhiều loại đạo hàm suy rộng được đề xuất và áp dụng trong nhiều chủ đề trong tối ưu đa trị như trên đạo hàm theo tia, mối quan hệ giữa dưới vi phân yếu, đạo hàm theo hướng và trên đạo hàm theo tia đối với các hàm không lồi, trên đạo hàm theo tia cấp cao,... Một vài kết quả về các điều kiện tối ưu và đối ngẫu trong tối ưu đa trị cũng được các tác giả nghiên cứu bằng cách sử dụng trên đạo hàm Studniarski suy rộng cấp cao, trên đạo hàm yếu cấp cao và trên đạo hàm tiếp tuyến suy rộng cấp hai mới. Tập tiếp tuyến cấp cao đã được giới thiệu, đây là dạng tổng quát hơn khái niệm cổ điển về tập tiếp tuyến cấp hai và tập tiếp tuyến cấp m mà không cần thiết m là một số nguyên. Khi đó, đạo hàm tiếp tuyến cấp cao của các hàm qua cách tiếp cận hình học (sử dụng đồ thị) thông qua tập tiếp tuyến cấp cao được định nghĩa với các áp dụng cho các điều kiện tối ưu cấp cao. Cho đến nay, chưa có nhiều kết quả có liên quan đến tập tiếp tuyến cấp cao và các ứng dụng của các tập này.

Một vấn đề khác, bài toán tối ưu hóa với ràng buộc biến mất được sử dụng để xây dựng bài toán phân phối tối ưu, bài toán tìm đường đi của robot hay bài toán điều khiển tối ưu ngắt mạch. Từ các ràng buộc đặc trưng $H_i(x) \geq 0$, $G_i(x).H_i(x) \leq 0$, ràng buộc $G_i(x) \leq 0$ biến mất ngay khi $H_i(x) = 0$ xảy ra. Mặc dù bài toán này được giải bằng cách sử dụng phương pháp quy hoạch phi tuyến trong một số trường hợp, nhưng nói chung, nó không phải là trường hợp đặc biệt của bài toán quy hoạch phi tuyến. Bên cạnh đó, bài toán này cũng không phải là trường hợp đặc biệt của bài toán quy hoạch lồi bởi vì trong trường hợp tổng quát, hàm tích $G(x).H(x)$ không phải là hàm lồi. Các tác giả đã đề xuất bài toán tối ưu đa mục tiêu nửa vô hạn với ràng buộc biến mất (viết tắt là MSIPVC) và khảo sát điều kiện tối ưu đủ dạng Karush-Kuhn-Tucker (viết tắt là KKT) cho bài toán MSIPVC. Về đối ngẫu Lagrange, tiêu chuẩn tối ưu điểm yên ngựa cho bài toán tối ưu đa mục tiêu cũng được nhiều tác giả khảo sát. Các tác giả đã thiết lập đối ngẫu Lagrange cho bài toán tối ưu đa mục tiêu dưới các giả thiết lồi và các điều kiện chính quy xấp xỉ và được mở rộng bằng cách sử dụng các hàm dạng dưới gần lồi theo nón (cone-subconvexlike), đề xuất một số điều kiện cho sự tồn tại của nhân tử Lagrange hoặc điểm yên ngựa yếu hay chỉ ra hai cách tiếp cận đối ngẫu cho bài toán quy hoạch tuyến tính đa mục tiêu. Có nhóm tác giả đã thiết lập mô hình đối ngẫu Lagrange và tiêu chuẩn tối ưu điểm yên ngựa cho bài toán tối ưu với ràng buộc cân bằng, sau đó được mở rộng các kết quả với cả hai dạng đối ngẫu Lagrange dạng vectơ và đối ngẫu Lagrange dạng vô hướng. Tiêu chuẩn tối ưu điểm yên ngựa cho bài toán tối ưu lồi đa mục tiêu nửa vô hạn cũng đã được đề xuất. Tuy nhiên, chưa có kết quả khảo sát nào cho dạng đối ngẫu Lagrange và tiêu chuẩn tối ưu điểm yên ngựa cho dạng bài toán MSIPVC.

Có nhiều bài báo về điều kiện tối ưu cấp hai cho các bài toán tối ưu hóa. Điều kiện tối ưu cấp hai cho bài toán tối ưu đa mục tiêu với các ràng buộc bất đẳng thức và các ràng buộc đẳng thức với định tính ràng buộc cấp hai và các giả thiết lồi yếu đã được nghiên cứu. Bằng cách sử dụng phép xấp xỉ cấp một và cấp hai như các đạo hàm suy rộng, cả hai điều kiện cần và điều kiện đủ tối ưu của bài toán đa mục tiêu với ràng buộc cân bằng và bài toán đa mục tiêu với các hàm phân thức đã được thiết lập. Điều kiện cần KKT cấp hai ở cả hai dạng gốc và dạng đối ngẫu cho các dạng bài toán tối ưu vectơ khả vi Fréchet liên tục đã được nghiên cứu theo định tính ràng buộc dạng Abadie cấp hai. Tuy nhiên, chúng tôi chưa thấy có bài báo nào thiết lập điều kiện cần và đủ tối ưu cấp hai cho dạng bài toán tối ưu đa mục tiêu với ràng buộc biến mất thông qua các định tính ràng buộc phù hợp.

Với động lực từ những lý luận trên, trong luận án này, chúng tôi khảo sát tính đối ngẫu của bài toán tối ưu đa trị với ràng buộc hỗn hợp bằng cách sử dụng trên đạo hàm tiếp tuyến cấp cao của các ánh xạ đa trị. Một số kết quả thu được cải thiện được những kết quả hiện có trong các tài liệu được nêu. Ở một lớp bài toán quan trọng khác, chúng tôi tập trung vào việc kiểm tra tính đối ngẫu Lagrange và tiêu chuẩn tối ưu điểm yên ngựa cho bài toán tối ưu đa mục tiêu nửa vô hạn với ràng buộc biến mất. Chúng tôi cũng khảo sát các điều kiện cần và đủ tối ưu cấp hai cho dạng bài toán tối ưu đa mục tiêu với ràng buộc biến mất thông qua định tính ràng buộc dạng Abadie.

Chương 3.

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản cũng như các tính chất nền tảng để phục vụ cho các nghiên cứu trong các chương sau.

3.1 Các khái niệm liên quan đến tập hợp

Định nghĩa 3.1. Với A là tập con khác rỗng của không gian định chuẩn X và $\bar{x} \in \mathrm{cl}A$.

(i) *Nón tiếp tuyến* (còn gọi là nón tiếp tuyến Bouligand) cấp một của A tại $\bar{x}$ được xác định bởi

$$T(A, \bar{x}) = \{x \in X \mid \exists t_k \to 0^+, x_k \to x : \forall k \in \mathbb{N}, \bar{x} + t_k x_k \in A\}.$$

(ii) *Nón kề cấp một* của A tại $\bar{x}$ được xác định bởi

$$T^\flat(A, \bar{x}) = \{x \in X \mid \forall t_k \to 0^+, x_k \to x : \forall k \in \mathbb{N}, \bar{x} + t_k x_k \in A\}.$$

Định nghĩa 3.2. Cho $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, $\bar{x} \in \mathrm{cl}A$ và $v \in A$.

(i) *Tập tiếp tuyến cấp hai* của A tại $\bar{x}$ theo hướng v được xác định bởi

$$T^2(A, \bar{x}, v) = \Big\{x \in X \mid \exists t_k \to 0^+, x_k \to x : \forall k \in \mathbb{N}, \bar{x} + t_k v + t_k^2 x_k \in A\Big\}.$$

(ii) *Tập kề cấp hai* của A tại $\bar{x}$ theo hướng v được xác định bởi

$$T^{\flat(2)}(A, \bar{x}, v) = \Big\{x \in X \mid \forall t_k \to 0^+, x_k \to x : \forall k \in \mathbb{N}, \bar{x} + t_k v + t_k^2 x_k \in A\Big\}.$$

(iii) *Nón tiếp tuyến tiệm cận cấp hai* của A tại $\bar{x}$ theo hướng v được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned} T''(A, \bar{x}, v) := \Big\{x \in X \mid \exists (t_k, r_k) \to (0^+, 0^+), \exists x_k \to x : \forall k \in \mathbb{N}, \\ \frac{t_k}{r_k} \to 0, \bar{x} + t_k v + \frac{1}{2} t_k r_k x_k \in A\Big\}. \end{aligned}$$

(iv) *Nón tiếp tuyến phép chiếu cấp hai* của A tại $\bar{x}$ theo hướng v được xác định bởi

$$\widehat{T}^2(A, \bar{x}, v) := \Big\{(x, s) \in X \times \mathbb{R}_+ \mid \exists (t_k, s_k) \to (0^+, s), \exists x_k \to x : \\ \forall k \in \mathbb{N}, \frac{t_k}{s_k} \to 0^+, \bar{x} + t_k v + \frac{1}{2} s_k^{-1} t_k^2 x_k \in A\Big\}.$$

3.2 Các khái niệm liên quan đến ánh xạ

Với X, Y là các không gian định chuẩn, ta xét $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị từ X vào Y, $C \subseteq Y$ là một nón lồi đóng.

Định nghĩa 3.6. Cho ánh xạ đa trị $F : X \rightrightarrows Y$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{gr}F$. *Trên đạo hàm tiếp tuyến* của F tại $(\bar{x}, \bar{y})$ là một ánh xạ đơn trị $EDF(\bar{x}, \bar{y}) : X \to Y$ thỏa mãn

$$\mathrm{epi}_C EDF(\bar{x}, \bar{y}) = T(\mathrm{epi}_C F, (\bar{x}, \bar{y})).$$

Trường hợp $F \equiv f$ là một ánh xạ đơn trị, ta viết $EDf(\bar{x})$ thay cho $EDF(\bar{x}, f(\bar{x}))$.

Định nghĩa 3.7. Cho ánh xạ đa trị $F : X \rightrightarrows Y$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{gr}F$ và $(u, v) \in X \times Y$.

(i) *Đạo hàm tiếp tuyến cấp hai* của F tại $(\bar{x}, \bar{y})$ theo hướng (u, v) là ánh xạ đa trị $D^2F(\bar{x}, \bar{y}, u, v) : X \rightrightarrows Y$ thỏa mãn

$$\mathrm{gr}D^2F(\bar{x}, \bar{y}, u, v) := T^2(\mathrm{gr}F, (\bar{x}, \bar{y}), (u, v)).$$

(ii) *Đạo hàm kề cấp hai* của F tại $(\bar{x}, \bar{y})$ theo hướng (u, v) là ánh xạ đa trị $D^{\flat(2)}F(\bar{x}, \bar{y}, u, v) : X \rightrightarrows Y$ thỏa mãn

$$\mathrm{gr}D^{\flat(2)}F(\bar{x}, \bar{y}, u, v) := T^{\flat(2)}(\mathrm{gr}F, (\bar{x}, \bar{y}), (u, v)).$$

(iii) *Trên đạo hàm tiếp tuyến cấp hai* của F tại $(\bar{x}, \bar{y})$ theo hướng (u, v) là ánh xạ đơn trị $ED^2F(\bar{x}, \bar{y}, u, v) : X \to Y$ thỏa mãn

$$\mathrm{epi}_C ED^2F(\bar{x}, \bar{y}, u, v) := T^2(\mathrm{epi}_C F, (\bar{x}, \bar{y}), (u, v)).$$

3.3 Các bài toán tối ưu

Xét bài toán tối ưu đa mục tiêu nửa vô hạn với ràng buộc biến mất (P) như sau

$$(P)\quad \begin{cases} \mathbb{R}^m_+ - \text{Min} & f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)), \\ \text{s.c.} & g_t(x) \le 0, t \in T, \\ & h_i(x) = 0, i \in I_h := \{1, \ldots, q\}, \\ & H_i(x) \ge 0, G_i(x)H_i(x) \le 0, i \in I_l := \{1, \ldots, l\}, \end{cases}$$

trong đó $f_i (i = 1, \ldots, m)$, $g_t (t \in T)$, $h_i (i = 1, \ldots, q)$ và $G_i, H_i (i = 1, \ldots, l)$ là các hàm khả vi liên tục từ $\mathbb{R}^n$ đến $\mathbb{R}$. Tập chỉ số T là một tập bất kỳ, khác rỗng, không nhất thiết hữu hạn. Tập nghiệm chấp nhận được của bài toán (P) có dạng

$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_t(x) \le 0 (t \in T), h_i(x) = 0 (i \in I_h), H_i(x) \ge 0, G_i(x)H_i(x) \le 0 (i \in I_l)\}$.

Kí hiệu $\mathbb{R}^{|T|}_+$ là tập hợp tất cả các hàm $\lambda : T \to \mathbb{R}$ chỉ nhận giá trị dương của λ_t tại hữu hạn các điểm của T và bằng 0 tại các điểm còn lại. Với $\bar{x} \in \Omega$ cho trước, ta kí hiệu các tập

$$I_g(\bar{x}) := \{t \in T \mid g_t(\bar{x}) = 0\},$$

$$\Lambda(\bar{x}) := \{\lambda \in \mathbb{R}^{|T|}_+ \mid \lambda_t g_t(\bar{x}) = 0, \forall t \in T\}.$$

Với mỗi $\bar{x} \in \Omega$, ta định nghĩa các tập chỉ số

$$\begin{aligned} I_{+0}(\bar{x}) &:= \{i \in I_l \mid H_i(\bar{x}) > 0, G_i(\bar{x}) = 0\}, \\ I_{+-}(\bar{x}) &:= \{i \in I_l \mid H_i(\bar{x}) > 0, G_i(\bar{x}) < 0\}, \\ I_{0+}(\bar{x}) &:= \{i \in I_l \mid H_i(\bar{x}) = 0, G_i(\bar{x}) > 0\}, \\ I_{00}(\bar{x}) &:= \{i \in I_l \mid H_i(\bar{x}) = 0, G_i(\bar{x}) = 0\}, \\ I_{0-}(\bar{x}) &:= \{i \in I_l \mid H_i(\bar{x}) = 0, G_i(\bar{x}) < 0\}. \end{aligned}$$

Định nghĩa 3.9. Điểm $\bar{x} \in \Omega$ được gọi là *điểm dừng VC* của bài toán (P) nếu và chỉ nếu tồn tại các nhân tử $(\alpha, \lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H) \in \mathbb{R}^m_+ \times \Lambda(\bar{x}) \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$ với $\sum\limits_{i \in I} \alpha_i = 1$, $\lambda^H_{I_+(\bar{x})} = 0$, $\lambda^H_{I_{00}(\bar{x}) \cup I_{0-}(\bar{x})} \ge 0$,

$\lambda^G_{I_{+-}(\bar{x})\cup I_{0+}(\bar{x})\cup I_{0-}(\bar{x})} = 0$ và $\lambda^G_{I_{+0}(\bar{x})\cup I_{00}(\bar{x})} \geq 0$ sao cho

$$\sum_{i\in I}\alpha_i\nabla f_i(\bar{x})+\sum_{t\in T}\lambda^g_t\nabla g_t(\bar{x})+\sum_{i\in I_h}\lambda^h_i\nabla h_i(\bar{x})-\sum_{i\in I_l}\lambda^H_i\nabla H_i(\bar{x})+\sum_{i\in I_l}\lambda^G_i\nabla G_i(\bar{x}) = 0.$$

Định nghĩa 3.10. *Điều kiện (VC-ACQ)* xảy ra tại $\bar{x}\in\Omega$ nếu

$$\left(\bigcup_{t\in I_g(\bar{x})}\nabla g_t(\bar{x})\right)^- \cap \left(\bigcup_{i\in I_h}\nabla h_i(\bar{x})\right)^\perp \cap \left(\bigcup_{i\in I_{0+}(\bar{x})}\nabla H_i(\bar{x})\right)^\perp$$

$$\cap\left(\bigcup_{i\in I_{00}(\bar{x})\cup I_{0-}(\bar{x})}-\nabla H_i(\bar{x})\right)^- \cap \left(\bigcup_{i\in I_{+0}(\bar{x})\cup I_{00}(\bar{x})}\nabla G_i(\bar{x})\right)^- \subseteq T(\Omega,\bar{x}),$$

trong đó $T(\Omega,\bar{x})$ là nón tiếp tuyến cấp một của Ω tại $\bar{x}$ đã được nhắc lại trong Định nghĩa 3.1 với $X=\mathbb{R}^n$.

3.4 Các định lý bổ trợ

Định lý 3.1. *Cho A, B, C lần lượt là các ma trận có giá trị thực cấp $m\times n$, $p\times n$, $q\times n$ và $x\in\mathbb{R}^n, \alpha\in\mathbb{R}^m, \lambda\in\mathbb{R}^p, \mu\in\mathbb{R}^q$, A là ma trận khác ma trận không. Khi đó, chỉ có một trong hai hệ sau có nghiệm*

$$(I)\begin{cases}\langle a_i^T, x\rangle < 0, i=1,\ldots,m,\\ \langle b_j^T, x\rangle \leq 0, j=1,\ldots,p,\\ \langle c_k^T, x\rangle = 0, k=1,\ldots,q,\end{cases}$$

$$(II)\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^m\alpha_i a_i+\sum\limits_{j=1}^p\lambda_j b_j+\sum\limits_{k=1}^q\mu_k c_k=\mathbf{0},\\ \alpha_i\geq 0, i=1,\ldots,m, \alpha\neq\mathbf{0}, \lambda_j\geq 0, j=1,\ldots,p,\end{cases}$$

trong đó $a_i\in\mathbb{R}^n$ ($b_j, c_k\in\mathbb{R}^n$), a_i^T (b_j^T, c_k^T) lần lượt là dòng thứ i (thứ j và thứ k) của ma trận A (B và C) và $\mathbf{0}$ là vectơ không trong $\mathbb{R}^n$.

Chương 4.

Đối ngẫu của bài toán tối ưu đa trị với ràng buộc hỗn hợp

Trong chương này, dựa trên cơ sở sử dụng trên đạo hàm tiếp tuyến cấp cao được đề xuất, chúng tôi nghiên cứu một vài kết quả điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu theo nghĩa Benson và quan hệ giữa bài toán gốc và các dạng bài toán đối ngẫu. Một số kết quả thu được cải thiện được những kết quả hiện có trong các tài liệu được nêu.

4.1 Tập tiếp tuyến cấp cao

Định nghĩa 4.1. Cho X là không gian định chuẩn, $S \subseteq X$, $x_0 \in \mathrm{cl}S$, $u \in X$ và $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

(i) *Tập tiếp tuyến cấp cao* của tập S tại điểm x_0 theo chỉ số r được xác định bởi

$$T_r^h(S, x_0, u) := \Big\{x \in X \mid \exists t_k \to 0^+, \exists s_k \to 0^+ : t_k s_k^{-1} \to r, \\ \exists x_k \to x, x_0 + t_k u + t_k s_k x_k \in S, \forall k \in \mathbb{N}\Big\}.$$

(ii) *Tập tiếp tuyến cấp cao liên thuộc* (incident) của tập S tại điểm x_0 theo chỉ số r được xác định bởi

$$T_r^{hi}(S, x_0, u) := \Big\{x \in X \mid \forall t_k \to 0^+, \forall s_k \to 0^+ : t_k s_k^{-1} \to r, \\ \exists x_k \to x, x_0 + t_k u + t_k s_k x_k \in S, \forall k \in \mathbb{N}\Big\}.$$

4.2 Trên đạo hàm tiếp tuyến cấp cao

Định nghĩa 4.2. Cho ánh xạ đa trị $F : X \rightrightarrows Y$, $(x_0, y_0) \in \mathrm{gr}F$, $(u, v) \in X \times Y$ và $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$. *Trên đạo hàm tiếp tuyến cấp cao* của F tại (x_0, y_0) tương ứng với nón C theo hướng (u, v) theo chỉ số r là ánh xạ đơn trị $E_C D_r^h F(x_0, y_0, u, v) : X \to Y$ thỏa

$$\mathrm{epi}_C E_C D_r^h F(x_0, y_0, u, v) = T_r^h(\mathrm{epi}_C F, (x_0, y_0), (u, v)).$$

Đạo hàm tiếp tuyến cấp cao của ánh xạ đa trị F tại (x_0, y_0) theo hướng (u, v) chỉ số r (kí hiệu là $D_r^h F(x_0, y_0, u, v)$), được định nghĩa bởi

$$\mathrm{gr} D_r^h F(x_0, y_0, u, v) := T_r^h(\mathrm{gr}F, (x_0, y_0), (u, v)).$$

Mệnh đề 4.4. *Cho ánh xạ đa trị $F : X \rightrightarrows Y$, $(x_0, y_0) \in \mathrm{gr}F$, $(u, v) \in X \times Y$, $x \in X$ và $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Giả sử một trong hai điều kiện trong Bổ đề 4.1 xảy ra và $E_C D_r^h F(x_0, y_0, u, v)$ tồn tại. Khi đó,*

$$E_C D_r^h F(x_0, y_0, u, v)(x) = \mathrm{Min}_C D_r^h F(x_0, y_0, u, v)(x).$$

Mệnh đề 4.5. *Cho ánh xạ đa trị $F : X \rightrightarrows Y$, $(x_0, y_0) \in \mathrm{gr}F$, $(u, v) \in X \times Y$ và $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Nếu $E_C D_r^h F(x_0, y_0, u, v)$ tồn tại, thì với $\lambda > 0$,*

$$\begin{aligned} \lambda E_C D_r^h F(x_0, y_0, u, v)(x/\lambda) &= E_C D_{\lambda r}^h F(x_0, y_0, u, v)(x) \\ &= E_C D_{r/\lambda}^h F(x_0, y_0, \lambda u, \lambda v)(x). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Với $r = 0$ hoặc $r = \infty$, ta có $E_C D_r^h F(x_0, y_0, u, v)(0) = \{0\}$ và $E_C D_r^h F(x_0, y_0, u, v)$ thỏa tính thuần nhất dương. Hơn nữa, nếu $\mathrm{epi}_C F$ là tập lồi và $(u, v) \in \mathrm{epi}_C F$, thì $E_C D_r^h F(x_0, y_0, u - x_0, v - y_0)$ thỏa tính dưới cộng tính.

Mệnh đề 4.6. *Cho ánh xạ đa trị $F : X \rightrightarrows \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathrm{gr}F$, $(u, v) \in X \times Y$ và $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Giả sử tồn tại các hàm $f, g : X \to \mathbb{R}$ sao cho $\mathrm{epi}_C g \subseteq T_r^h(\mathrm{epi}_C F, (x_0, y_0), (u, v)) \subseteq \mathrm{epi}_C f$. Khi đó,*

$$E_C D_r^h F(x_0, y_0, u, v)(x) = \min \Big\{ y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in T_r^h(\mathrm{epi}_C F, (x_0, y_0), (u, v)) \Big\}. \tag{4.9}$$

4.3 Đối ngẫu của bài toán tối ưu đa trị với ràng buộc hỗn hợp

Giả sử X, Y, Z và W là các không gian định chuẩn, C và D lần lượt là các nón lồi đóng trong Y và Z với phần trong khác rỗng. Chúng tôi xét bài toán tối ưu với các ràng buộc hỗn hợp sau

$$(P1)\quad \begin{cases} & \mathrm{BMin}_C\ F(x), \\ \text{s.c.} & x \in X, \\ & G(x) \cap (-D) \neq \emptyset, \\ & 0 \in H(x), \end{cases}$$

trong đó $F : X \rightrightarrows Y$, $G : X \rightrightarrows Z$ và $H : X \rightrightarrows W$ là các ánh xạ đa trị.

Đặt $\Omega_P := \{x \in X \mid G(x) \cap (-D) \neq \emptyset, 0 \in H(x)\}$. Giả sử $\mathcal{K} := C \times D \times \{0\}$ là nón lồi đóng và nhọn trong $Y \times Z \times W$ và $\mathcal{F}(x) := (F, G, H)(x)$ là ánh xạ đa trị từ X vào $Y \times Z \times W$. Với $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$, ta kết hợp bài toán $(P1)$ với bài toán đối ngẫu hỗn hợp (DP) như sau

$$\max\ h(x, y, z, c^*, d^*, w^*) := y + \frac{e}{\langle c^*, e\rangle}(1 - \delta)\langle d^*, z\rangle,$$

$$\begin{aligned} &\langle c^*, \hat{y}\rangle + \langle d^*, \hat{z}\rangle + \langle w^*, \hat{w}\rangle \geq 0, \\ &\qquad \forall (\hat{y}, \hat{z}, \hat{w}) \in E_{\mathcal{K}} D^h_r \mathcal{F}(x, y, z, 0, u - x, v - y, l - z, w)(S), \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\delta\langle d^*, z\rangle \geq 0, \tag{4.12}$$

$$c^* \in C^* \setminus \{0\},\ d^* \in D^*,\ w^* \in W^*, \tag{4.13}$$

trong đó (x, y, z) là điểm chấp nhận được của bài toán $(P1)$, $e \in -\mathrm{int}C$, $\delta \in \{0, 1\}$, $(u, v, l, w) \in X \times Y \times Z \times W$ và $S := \mathrm{dom} E_{\mathcal{K}} D^h_r \mathcal{F}(x, y, z, 0, u - x, v - y, l - z, w)$. Khi $\delta = 0$ và $\delta = 1$, bài toán (DP) lần lượt được quy về bài toán đối ngẫu dạng Wolfe và bài toán đối ngẫu dạng Mond-Weir tương ứng. Đặt

$$\Omega_{DP} := \Big\{(x, y, z, c^*, d^*, w^*) \mid (x, y, z) \text{ là điểm chấp nhận được của } (P1),$$
$$(x, y, z, c^*, d^*, w^*) \text{ thỏa mãn các điều kiện } (4.11){-}(4.13)\Big\}$$

là tập chấp nhận được của bài toán (DP), (x, y, z, c^*, d^*, w^*) được gọi là nghiệm hữu hiệu chính thường theo nghĩa Benson của bài toán đối ngẫu (DP) nếu $(x, y, z, c^*, d^*, w^*) \in \Omega_{DP}$ và $\mathrm{clcone}\Big(h(\Omega_{DP}) - C - h(x, y, z, c^*, d^*, w^*)\Big) \cap C = \{0\}$.

Định lý 4.1. (Đối ngẫu yếu) *Cho* $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$, (x_0, y_0, z_0) *và* $(x', y', z', c^*, d^*, w^*)$ *lần lượt là điểm chấp nhận được của bài toán* $(P1)$ *và bài toán đối ngẫu* (DP). *Giả sử* $(u, v, l, w) \in \mathrm{epi}_{\mathcal{K}}\mathcal{F}$ *và* $\mathrm{epi}_{\mathcal{K}}\mathcal{F}$ *là tập lồi. Khi đó,*

$$h(x', y', z', c^*, d^*, w^*) - y_0 \notin \mathrm{int}C.$$

Bổ đề 4.3. *Cho* $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $(v - y_0, l - z_0, w) \in -\mathcal{K}$ *và* (x_0, y_0, z_0) *là nghiệm hữu hiệu chính thường theo nghĩa Benson của bài toán* $(P1)$. *Nếu bất kỳ* $w_k \to 0$ *với* $w_k \in H(x_k)$, *ta có với mọi* $k \in \mathbb{N}$, *tồn tại* $k_0 > k$ *sao cho* $0 \in H(x_{k_0})$, *thì*

$$E_{\mathcal{K}} D_r^h \mathcal{F}(x_0, y_0, z_0, 0, u - x_0, v - y_0, l - z_0, w)(S) \cap \Big((-\mathrm{int}C) \times (-\mathrm{intcone}(D + z_0)) \times \{0\}\Big) = \emptyset. \quad (4.18)$$

Định lý 4.2. (Đối ngẫu mạnh) *Cho* $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$ *và các điều kiện trong Định lý 4.1 và Bổ đề 4.3 thỏa. Giả sử các điều kiện sau đây được thỏa mãn*

(i) *Tập* $E_{\mathcal{K}} D_r^h \mathcal{F}(x_0, y_0, z_0, 0, u - x_0, v - y_0, l - z_0, w)(S)$ *lồi với phần trong khác rỗng,*

(ii) $\mathrm{cone}E_{D \times \{0\}} D_r^h (G, H)(x_0, z_0, 0, u - x_0, l - z_0, w)(S) + \mathrm{cone}(D + z_0) \times \{0\} = Z \times W$.

Khi đó, tồn tại $c^* \in C^* \backslash \{0\}$, $d^* \in D^*$, $w^* \in W^*$ *sao cho* $(x_0, y_0, z_0, c^*, d^*, w^*)$ *là điểm chấp nhận được của bài toán đối ngẫu* (DP).
Hơn nữa, nếu với $y \in C \cap \mathrm{clcone}\Big(h(\Omega_{DP}) - C - h(x_0, y_0, z_0, c^*, d^*, w^*)\Big)$, *tồn tại* $\alpha > 0$ *sao cho*

$$d\Big(y, \mathrm{cone}\Big(h(\Omega_{DP}) - h(x_0, y_0, z_0, c^*, d^*, w^*)\Big) \cap \mathrm{int}C\Big) \leq \alpha d(y, C), \quad (4.21)$$

thì $(x_0, y_0, z_0, c^*, d^*, w^*)$ *là nghiệm hữu hiệu chính thường theo nghĩa Benson của bài toán đối ngẫu* (DP).

Định lý 4.3. (Đối ngẫu ngược) *Cho* $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$ *và* (x_0, y_0, z_0) *là điểm chấp nhận được của bài toán* $(P1)$. *Giả sử tồn tại* $c^* \in C^* \setminus \{0\}$, $d^* \in D^*$, $w^* \in W^*$ *sao cho* $(x_0, y_0, z_0, c^*, d^*, w^*)$ *là điểm chấp nhận được của bài toán đối ngẫu* (DP) *và các điều kiện trong Bổ đề 4.2 thỏa mãn. Nếu với* $y \in (-C) \cap \mathrm{clcone}(F(\Omega_P) + C - y_0)$, *tồn tại* $\alpha > 0$ *sao cho*

$$d\Big(y, \mathrm{cone}(F(\Omega_P) - y_0) \cap (-\mathrm{int}C)\Big) \leq \alpha d(y, -C), \tag{4.26}$$

thì (x_0, y_0, z_0) *là nghiệm hữu hiệu chính thường theo nghĩa Benson của bài toán* $(P1)$.

4.4 Kết luận Chương 4

Trong chương này, chúng tôi đã giới thiệu khái niệm trên đạo hàm tiếp tuyến cấp cao của các ánh xạ đa trị và nghiên cứu một vài tính chất của khái niệm này. Thông qua khái niệm trên đạo hàm này, chúng tôi thiết lập các kết quả đối ngẫu của bài toán tối ưu đa trị với ràng buộc hỗn hợp. Một vài kết quả thu được cải thiện các kết quả tương ứng trong các tài liệu được nêu. Nhiều ví dụ cũng được đưa ra để minh họa cho các kết quả mà chúng tôi đã trình bày.

Hạn chế ở đây là các giả thiết được đưa ra khá phức tạp về mặt kỹ thuật đối với các mở rộng có thể. Chúng tôi hy vọng rằng các cải tiến này có thể thu được kết quả tốt hơn trong tương lai. Hơn nữa, đối ngẫu dạng Mond-Weir là chủ đề rất thú vị trong thời gian gần đây, nó được đề cập từ một khía cạnh khác. Do vậy, nghiên cứu các ứng dụng đối ngẫu, đặc biệt là các phương pháp số, là cách tiếp cận đầy hứa hẹn trong tương lai.

Chương 5.

Đối ngẫu Lagrange và điều kiện tối ưu điểm yên ngựa của bài toán tối ưu đa mục tiêu nửa vô hạn với ràng buộc biến mất

Trong chương này, chúng tôi thiết lập cả hai mô hình đối ngẫu Lagrange dạng vectơ và đối ngẫu Lagrange dạng vô hướng hóa của bài toán tối ưu đa mục tiêu nửa vô hạn với ràng buộc biến mất để tìm các mối quan hệ đối ngẫu mạnh và đối ngẫu yếu giữa bài toán gốc với bài toán đối ngẫu của chúng. Chúng tôi cũng khảo sát và thu được một vài quan hệ đối ngẫu dưới các giả thiết lồi. Đối với mỗi mô hình, chúng tôi xem xét các mối quan hệ giữa tính đối ngẫu mạnh và điều kiện tối ưu điểm yên ngựa cho bài toán này.

5.1 Đối ngẫu Lagrange

Với bài toán tối ưu đa mục tiêu nửa vô hạn với ràng buộc biến mất (P) được đề cập trong Chương 3, với $\lambda := (\lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H) \in \mathbb{R}_+^{|T|} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$, $e := (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^m$, chúng tôi kí hiệu

$$\widehat{L}_V(x, \lambda) := f(x) + \left(\sum_{t \in T} \lambda_t^g g_t(x) + \sum_{i \in I_h} \lambda_i^h h_i(x) - \sum_{i \in I_l} \lambda_i^H H_i(x) + \sum_{i \in I_l} \lambda_i^G G_i(x) \right) e,$$

là hàm vectơ Lagrange MSIPVC của bài toán (P) và ánh xạ đối ngẫu yếu đa trị $\Phi^W : \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ với $\Phi^W(\lambda) := \mathrm{WMin}_{\mathbb{R}_+^m} \{ \widehat{L}_V(x, \lambda) \mid x \in \Omega \}$.

Chúng tôi xét mô hình đối ngẫu Lagrange yếu dạng vectơ phụ thuộc vào điểm chấp nhận được $x \in \Omega$ của bài toán (P) như sau

$$\begin{array}{lc} (WVD_L(x)) & \mathbb{R}_+^m - \mathrm{WMax}\, \Phi^W(\lambda), \\ \text{s.c.} & \lambda^g_{T \setminus I_g(x)} \geq 0, \lambda^G_{I_{0+}(x)} \leq 0, \\ & \lambda^G_{I_{+-}(x) \cup I_{0-}(x)} \geq 0, \lambda^H_{I_+(x)} \geq 0. \end{array}$$

Kí hiệu $\Omega_{WVD_L(x)}$ là tập nghiệm chấp nhận được của bài toán $(WVD_L(x))$ ứng với điểm chấp nhận được $x \in \Omega$.

Mệnh đề 5.1. *Với bất kỳ $x \in \Omega$ và $y \in \bigcup_{\lambda \in \Omega_{WVD_L(x)}} \Phi^W(\lambda)$, ta có*

$$f(x) \not< y.$$

Mệnh đề 5.2. *Giả sử $\bar{x} \in \Omega$, $\bar{\lambda} \in \Omega_{WVD_L(\bar{x})}$ và $f(\bar{x}) \in \Phi^W(\bar{\lambda})$. Khi đó,*
(i) *$\bar{y} = f(\bar{x})$ là nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán đối ngẫu $(WVD_L(\bar{x}))$.*
(ii) *Giả sử thêm rằng $\bar{\lambda} \in \Omega_{WVD_L}$. Khi đó, $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán gốc (P).*
Mệnh đề 5.3. *Cho $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán (P) sao cho (VC-ACQ) xảy ra tại $\bar{x}$ và Δ là tập đóng. Giả sử $f_i (i \in I)$ là các hàm lồi tại $\bar{x}$ và $g_t(t \in I_g^+(\bar{x})), h_i(i \in I_h^+(\bar{x})), -h_i(i \in I_h^-(\bar{x})), H_i(i \in \hat{I}_{0+}^-(\bar{x})), -H_i(i \in \hat{I}_{0+}^+(\bar{x}) \cup \hat{I}_{00}^+(\bar{x}) \cup \hat{I}_{0-}^+(\bar{x})), G_i(i \in I_{+0}^+(\bar{x}) \cup I_{00}^+(\bar{x}))$ là các hàm lồi tại $\bar{x}$. Khi đó, tồn tại các nhân tử $\bar{\lambda} \in \Omega_{WVD_L(\bar{x})}$ sao cho $f(\bar{x}) \in \Phi^W(\bar{\lambda})$, và do đó, $f(\bar{x})$ là nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán đối ngẫu $(WVD_L(\bar{x}))$.*

Tương tự, với mô hình đối ngẫu Lagrange dạng vectơ phụ thuộc vào điểm chấp nhận được $x \in \Omega$ của bài toán (P), chúng tôi có các kết quả như sau
Mệnh đề 5.4. *Với $x \in \Omega$ và $y \in \bigcup_{\lambda \in \Omega_{VD_L(x)}} \Phi(\lambda)$, ta có $f(x) \npreceq y$.*
Mệnh đề 5.5. *Giả sử rằng $\bar{x} \in \Omega$, $\bar{\lambda} \in \Omega_{VD_L(\bar{x})}$ và $f(\bar{x}) \in \Phi(\bar{\lambda})$. Khi đó,*
(i) *$\bar{y} = f(\bar{x})$ là nghiệm hữu hiệu của bài toán đối ngẫu $(VD_L(\bar{x}))$.*
(ii) *Giả sử thêm rằng $\bar{\lambda} \in \Omega_{VD_L}$. Khi đó $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu của bài toán gốc (P).*
Mệnh đề 5.6. *Giả sử $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu địa phương của bài toán (P) sao cho điều kiện (VC-ACQ) xảy ra tại $\bar{x}$ và Δ đóng. Nếu $f_i(i \in I)$ là các hàm lồi chặt tại $\bar{x}$, $g_t(t \in I_g^+(\bar{x})), h_i(i \in I_h^+(\bar{x})), -h_i(i \in I_h^-(\bar{x})), H_i(i \in \hat{I}_{0+}^-(\bar{x})), -H_i(i \in \hat{I}_{0+}^+(\bar{x}) \cup \hat{I}_{00}^+(\bar{x}) \cup \hat{I}_{0-}^+(\bar{x})), G_i(i \in I_{+0}^+(\bar{x}) \cup I_{00}^+(\bar{x}))$ là các hàm lồi tại $\bar{x}$. Khi đó tồn tại các nhân tử $\bar{\lambda} \in \Omega_{VD_L(\bar{x})}$ sao cho $f(\bar{x}) \in \Phi(\bar{\lambda})$, và do đó, $f(\bar{x})$ là nghiệm hữu hiệu của bài toán đối ngẫu $(VD_L(\bar{x}))$.*

Với $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}_+^m$ cố định thỏa $\sum_{i \in I} \bar{\alpha}_i = 1$ và $\lambda := (\lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H) \in$

$\mathbb{R}_+^{|T|} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$, hàm Lagrange MSIPVC vô hướng hóa của bài toán (P) có dạng

$$\widehat{L}(x, \bar{\alpha}, \lambda) := \sum_{i \in I} \bar{\alpha}_i f_i(x) + \sum_{t \in T} \lambda_t^g g_t(x) + \sum_{i \in I_h} \lambda_i^h h_i(x) - \sum_{i \in I_l} \lambda_i^H H_i(x) + \sum_{i \in I_l} \lambda_i^G G_i(x),$$

trong đó $\phi(\bar{\alpha}, \lambda) := \min_{x \in \Omega} \widehat{L}(x, \bar{\alpha}, \lambda)$ là ánh xạ đối ngẫu đơn trị vô hướng hóa.

Chúng tôi đề xuất mô hình đối ngẫu Lagrange dạng vô hướng hóa phụ thuộc vào điểm chấp nhận được $x \in \Omega$ của bài toán (P) như sau

$$\begin{array}{lll} (D_L(x, \bar{\alpha})) & & \max \phi(\bar{\alpha}, \lambda), \\ & \text{s.c.} & \lambda^g_{T \setminus I_g(x)} \geq 0, \lambda^G_{I_{0+}(x)} \leq 0, \\ & & \lambda^G_{I_{+-}(x) \cup I_{0-}(x)} \geq 0, \lambda^H_{I_+(x)} \geq 0. \end{array}$$

Đặt $\Omega_{D_L(x, \bar{\alpha})}$ là miền chấp nhận được của bài toán $(D_L(x, \bar{\alpha}))$ ứng với điểm chấp nhận được $x \in \Omega$.

Mệnh đề 5.7. *Cho x là điểm chấp nhận được của bài toán (P) và λ là điểm chấp nhận được của bài toán đối ngẫu $(D_L(x, \bar{\alpha}))$, khi đó*

$$\phi(\bar{\alpha}, \lambda) \leq \sum_{i \in I} \bar{\alpha}_i f_i(x).$$

Mệnh đề 5.8. *Giả sử $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu địa phương yếu của bài toán (P) sao cho (VC-ACQ) xảy ra tại $\bar{x}$ và Δ là một tập đóng. Nếu $f_i (i \in I)$ là các hàm lồi tại $\bar{x}$, các hàm $g_t(t \in I_g^+(\bar{x})), h_i(i \in I_h^+(\bar{x})), -h_i(i \in I_h^-(\bar{x})), H_i(i \in \hat{I}_{0+}^-(\bar{x}))$, $-H_i(i \in \hat{I}_{0+}^+(\bar{x}) \cup \hat{I}_{00}^+(\bar{x}) \cup \hat{I}_{0-}^+(\bar{x})), G_i(i \in I_{+0}^+(\bar{x}) \cup I_{00}^+(\bar{x}))$ lồi tại $\bar{x}$. Khi đó, tồn tại $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}_+^m$ với $\sum_{i \in I} \bar{\alpha}_i = 1$ sao cho $\bar{\lambda}$ là nghiệm tối ưu của bài toán $(D_L(\bar{x}, \bar{\alpha}))$ và $\sum_{i \in I} \bar{\alpha}_i f_i(\bar{x}) = \phi(\bar{\alpha}, \bar{\lambda})$.*

5.2 Tiêu chuẩn tối ưu điểm yên ngựa

Định nghĩa 5.1.

(i) Điểm $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ với $\bar{x} \in \Omega$ và $\bar{\lambda} \in \Omega_{WVD_L(\bar{x})}$ được gọi là *điểm yên ngựa yếu* của hàm Lagrange $\widehat{L}_V$ nếu và chỉ nếu

$$\widehat{L}_V(x, \bar{\lambda}) \not< \widehat{L}_V(\bar{x}, \bar{\lambda}) \not< \widehat{L}_V(\bar{x}, \lambda), \forall x \in \Omega, \forall \lambda \in \Omega_{WVD_L(\bar{x})}.$$

(ii) Điểm $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ với $\bar{x} \in \Omega$ và $\bar{\lambda} \in \Omega_{VD_L(\bar{x})}$ được gọi là *điểm yên ngựa* của hàm Lagrange $\widehat{L}_V$ nếu và chỉ nếu

$$\widehat{L}_V(x, \bar{\lambda}) \not\leq \widehat{L}_V(\bar{x}, \bar{\lambda}) \not\leq \widehat{L}_V(\bar{x}, \lambda), \forall x \in \Omega, \forall \lambda \in \Omega_{VD_L(\bar{x})}.$$

Mệnh đề 5.9. (i) *Giả sử các giả thiết của Mệnh đề 5.3 thỏa mãn. Nếu $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (P), thì tồn tại $\bar{\lambda} \in \Omega_{WVD_L(\bar{x})}$ sao cho $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ là điểm yên ngựa yếu của hàm $\widehat{L}_V$.*
(ii) *Nếu $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in \Omega \times \Omega_{WVD_L(\bar{x})}$ là điểm yên ngựa yếu của hàm $\widehat{L}_V$, thì $f(\bar{x}) \in \Phi^W(\bar{\lambda})$, trong đó $\bar{x}$ và $f(\bar{x})$ lần lượt là nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán gốc (P) và bài toán đối ngẫu $(WVD_L(\bar{x}))$.*
Mệnh đề 5.10. *Giả sử $\bar{x} \in \Omega$ là điểm dừng VC của bài toán (P) với mỗi $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^m_+$ thỏa $\sum_{i \in I} \bar{\alpha}_i = 1$. Giả sử rằng $f_i (i \in I), g_t(t \in I_g^+(\bar{x})), h_i(i \in I_h^+(\bar{x})), -h_i(i \in I_h^-(\bar{x})), H_i(i \in \hat{I}_{0+}^-(\bar{x})), -H_i(i \in \hat{I}_{0+}^+(\bar{x}) \cup \hat{I}_{00}^+(\bar{x}) \cup \hat{I}_{0-}^+(\bar{x}))$, $G_i(i \in I_{+0}^+(\bar{x}) \cup I_{00}^+(\bar{x}))$ là các hàm lồi tại $\bar{x}$. Khi đó tồn tại $\bar{\lambda} \in \Lambda(\bar{x}) \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$ sao cho $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ là điểm yên ngựa yếu của hàm $\widehat{L}_V$.*
Mệnh đề 5.11. (i) *Giả sử rằng các giả thiết của Mệnh đề 5.6 thỏa mãn. Nếu $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu địa phương của bài toán (P), khi đó tồn tại các nhân tử $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}^g, \bar{\lambda}^h, \bar{\lambda}^G, \bar{\lambda}^H) \in \Lambda(\bar{x}) \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$ sao cho $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ là điểm yên ngựa của hàm $\widehat{L}_V$.*
(ii) *Nếu $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in \Omega \times \Omega_{VD_L(\bar{x})}$ là điểm yên ngựa của hàm $\widehat{L}_V$ thì $f(\bar{x}) \in \Phi(\bar{\lambda})$, trong đó $\bar{x}$ và $f(\bar{x})$ lần lượt là các nghiệm hữu hiệu của bài toán gốc (P) và bài toán đối ngẫu $(VD_L(\bar{x}))$.*
Mệnh đề 5.12. *Cho $\bar{x} \in \Omega$ là điểm dừng VC của bài toán (P) với mỗi $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^m_+$ thỏa $\sum_{i \in I} \bar{\alpha}_i = 1$. Giả sử $f_i(i \in I)$ là các hàm lồi chặt tại $\bar{x}$, các hàm $g_t(t \in I_g^+(\bar{x})), h_i(i \in I_h^+(\bar{x})), -h_i(i \in I_h^-(\bar{x})), H_i(i \in \hat{I}_{0+}^-(\bar{x})), -H_i(i \in \hat{I}_{0+}^+(\bar{x}) \cup \hat{I}_{00}^+(\bar{x}) \cup \hat{I}_{0-}^+(\bar{x}))$, $G_i(i \in I_{+0}^+(\bar{x}) \cup I_{00}^+(\bar{x}))$ lồi tại $\bar{x}$. Khi đó, tồn tại $\bar{\lambda} \in \Lambda(\bar{x}) \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$ sao cho $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ là điểm yên ngựa của hàm $\widehat{L}_V$.*

Định nghĩa 5.2. Cho $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^m_+$ với $\sum_{i \in I} \bar{\alpha}_i = 1$ là một điểm cố định. Điểm $(\bar{x}, \bar{\lambda})$, với $\bar{x} \in \Omega$ và $\bar{\lambda} \in \Omega_{D_L(\bar{x}, \bar{\alpha})}$, được gọi là *điểm yên ngựa* của hàm Lagrange $\widehat{L}$ nếu và chỉ nếu

$$\widehat{L}(\bar{x},\bar{\alpha},\lambda) \le \widehat{L}(\bar{x},\bar{\alpha},\bar{\lambda}) \le \widehat{L}(x,\bar{\alpha},\bar{\lambda}), \forall x \in \Omega, \forall \lambda \in \Omega_{D_L(\bar{x},\bar{\alpha})}.$$

Mệnh đề 5.13. (i) *Giả sử $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán (P) và các giả thiết của Mệnh đề 5.8 thỏa mãn. Khi đó, tồn tại $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}^g, \bar{\lambda}^h, \bar{\lambda}^G, \bar{\lambda}^H) \in \Lambda(\bar{x}) \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$ sao cho $(\bar{x},\bar{\lambda})$ là điểm yên ngựa của hàm $\widehat{L}$.*
(ii) *Nếu $(\bar{x},\bar{\lambda}) \in \Omega \times \Omega_{D_L(\bar{x},\bar{\alpha})}$ là điểm yên ngựa của hàm $\widehat{L}$, tập Ω lồi, $f_i (i \in I)$ là các hàm lồi và $\bar{\alpha}_i > 0$ với mọi $i \in I$, thì $\phi(\bar{\alpha},\bar{\lambda}) = \sum\limits_{i\in I} \bar{\alpha}_i f_i(\bar{x})$, trong đó $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu chính thường của bài toán gốc (P) và $\bar{\lambda}$ là nghiệm tối ưu của bài toán đối ngẫu $(D_L(\bar{x},\bar{\alpha}))$.*
Mệnh đề 5.14. *Giả sử $\bar{x} \in \Omega$ là điểm dừng VC của bài toán (P) với mỗi $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^m_+$ sao cho $\sum\limits_{i\in I} \bar{\alpha}_i = 1$. Giả sử rằng $f_i(i \in I), g_t(t \in I_g^+(\bar{x}))$, $h_i(i \in I_h^+(\bar{x})), -h_i(i \in I_h^-(\bar{x})), H_i(i \in \hat{I}_{0+}^-(\bar{x}))$, $-H_i(i \in \hat{I}_{0+}^+(\bar{x}) \cup \hat{I}_{00}^+(\bar{x}) \cup \hat{I}_{0-}^+(\bar{x}))$, $G_i(i \in I_{+0}^+(\bar{x}) \cup I_{00}^+(\bar{x}))$ là các hàm lồi tại $\bar{x}$. Khi đó, tồn tại $\bar{\lambda} \in \Lambda(\bar{x}) \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$ sao cho $(\bar{x},\bar{\lambda})$ là điểm yên ngựa của hàm $\widehat{L}$.*

5.3 Kết luận Chương 5

Trong chương này, chúng tôi đã thiết lập cả hai mô hình đối ngẫu Lagrange dạng vectơ và đối ngẫu Lagrange dạng vô hướng hóa cho bài toán tối ưu đa mục tiêu nửa vô hạn với ràng buộc biến mất để tìm các mối quan hệ đối ngẫu mạnh và đối ngẫu yếu giữa bài toán gốc với bài toán đối ngẫu của chúng. Hơn nữa, chúng tôi đã khảo sát và thu được một vài quan hệ đối ngẫu dưới các giả thiết lồi. Đối với mỗi mô hình, chúng tôi xem xét các mối quan hệ giữa tính đối ngẫu mạnh và điều kiện tối ưu điểm yên ngựa cho bài toán tối ưu đa mục tiêu nửa vô hạn với ràng buộc biến mất. Chúng tôi cũng minh họa các kết quả chính bằng các ví dụ phù hợp. Việc xem xét các điều kiện tối ưu và đối ngẫu Lagrange cho bài toán tối ưu đa mục tiêu nửa vô hạn với ràng buộc biến mất bằng cách sử dụng trên đồ thị của các hàm liên hợp có thể là những chủ đề thú vị cho nghiên cứu trong tương lai.

Chương 6.

Điều kiện tối ưu cấp hai của bài toán tối ưu đa mục tiêu với ràng buộc biến mất

Trong chương này, chúng tôi tập trung nghiên cứu điều kiện tối ưu cần và đủ cấp hai cho cả hai dạng gốc và dạng đối ngẫu cho bài toán tối ưu đa mục tiêu với ràng buộc biến mất. Xét bài toán (P') như sau

$$(P') \quad \begin{cases} \mathbb{R}^m_+ - \min & f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)), \\ \text{s.c.} & g_i(x) \leq 0, i \in J := \{1, \dots, p\}, \\ & h_i(x) = 0, i \in I_h := \{1, \dots, q\}, \\ & H_i(x) \geq 0, G_i(x)H_i(x) \leq 0, i \in I_l := \{1, \dots, l\}, \end{cases}$$

trong đó $f_i(i \in I = \{1, \dots, m\})$, $g_i(i \in J)$ (hữu hạn), $h_i(i \in I_h)$ và $G_i, H_i(i \in I_l)$ là các hàm khả vi liên tục cấp hai từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$. Tập nghiệm chấp nhận được của bài toán (P') có dạng

$$\Omega' := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0 (i \in J), h_i(x) = 0 (i \in I_h), \\ H_i(x) \geq 0, G_i(x)H_i(x) \leq 0 (i \in I_l)\}.$$

Các tập chỉ số được kí hiệu giống như tập chỉ số được sử dụng trong bài toán (P) ở Chương 5, chỉ khác các tập sau

$$I'_g(\bar{x}) := \{i \in J \mid g_i(\bar{x}) = 0\},$$

$$\Lambda'(\bar{x}) := \{\lambda \in \mathbb{R}^p_+ \mid \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0, \forall i \in I'_g\}.$$

6.1 Điều kiện cần tối ưu cấp hai

Với $\bar{x} \in \Omega'$ và $v \in L(\bar{x})$, chúng tôi định nghĩa các tập chỉ số

$$I_g(\bar{x}, v) = \{i \in I'_g \mid \langle \nabla g_i(\bar{x}), v \rangle = 0\} \subseteq I'_g,$$

$$\hat{I}_{00}(\bar{x}, v) = \{i \in I_{00} \mid \langle \nabla H_i(\bar{x}), v \rangle = 0\} \subseteq I_{00},$$

$$I_{00}(\bar{x}, v) = \{i \in I_{00} \mid \langle \nabla G_i(\bar{x}), v \rangle = 0\} \subseteq I_{00},$$

$$I_{0-}(\bar{x}, v) = \{i \in I_{0-} \mid \langle \nabla H_i(\bar{x}), v\rangle = 0\} \subseteq I_{0-},$$

$$I_{+0}(\bar{x}, v) = \{i \in I_{+0} \mid \langle \nabla G_i(\bar{x}), v\rangle = 0\} \subseteq I_{+0}.$$

Định nghĩa 6.3. Cho $\bar{x} \in \Omega'$ và $v \in L(\bar{x})$.
(i) *Nón tuyến tính hóa cấp hai* của Ω' tại $\bar{x}$ theo hướng v được định nghĩa bởi

$$\widehat{L}^2(\bar{x}, v) := \left\{ (d, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ : \begin{array}{ll} \langle \nabla g_i(\bar{x}), d\rangle + s \left\langle \nabla^2 g_i(\bar{x})v, v \right\rangle \le 0, & \forall i \in I_g(\bar{x}, v), \\ \langle -\nabla H_i(\bar{x}), d\rangle + s \left\langle -\nabla^2 H_i(\bar{x})v, v \right\rangle \le 0, & \forall i \in \hat{I}_{00}(\bar{x}, v) \cup I_{0-}(\bar{x}, v), \\ \langle \nabla G_i(\bar{x}), d\rangle + s \left\langle \nabla^2 G_i(\bar{x})v, v \right\rangle \le 0, & \forall i \in I_{+0}(\bar{x}, v), \\ \langle \nabla h_i(\bar{x}), d\rangle + s \left\langle \nabla^2 h_i(\bar{x})v, v \right\rangle = 0, & \forall i \in I_h, \\ \langle \nabla H_i(\bar{x}), d\rangle + s \left\langle \nabla^2 H_i(\bar{x})v, v \right\rangle = 0, & \forall i \in I_{0+}. \end{array} \right\}.$$

(ii) *Nón tuyến tính hóa cấp hai dạng VC* của Ω' tại $\bar{x}$ theo hướng v được xác định bởi

$$\widehat{L}^2_{VC}(\bar{x}, v) = \widehat{L}^2(\bar{x}, v)$$
$$\cap \{(d, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mid \langle \nabla G_i(\bar{x}), d\rangle + s \left\langle \nabla^2 G_i(\bar{x})v, v \right\rangle \le 0, \forall i \in I_{00}(\bar{x}, v)\}.$$

Mệnh đề 6.1. *Nếu $\bar{x} \in \Omega'$ và $v \in T(\Omega', \bar{x})$ thì $\widehat{T}^2(\Omega', \bar{x}, v) \subseteq \widehat{L}^2(\bar{x}, v)$.*
Định nghĩa 6.4.

(i) *Định tính ràng buộc dạng Abadie cấp hai* (viết tắt là SACQ) xảy ra tại $\bar{x}$ theo hướng $v \in T(\Omega', \bar{x})$ nếu $\widehat{L}^2(\bar{x}, v) \subseteq \widehat{T}^2(\Omega', \bar{x}, v)$.

(ii) *Định tính ràng buộc biến mất dạng Abadie cấp hai* (viết tắt là SVC-ACQ) xảy ra tại $\bar{x}$ theo hướng $v \in T(\Omega', \bar{x})$ nếu $\widehat{L}^2_{VC}(\bar{x}, v) \subseteq \widehat{T}^2(\Omega', \bar{x}, v)$.

Chúng ta nói rằng (SACQ) (tương ứng, (SVC-ACQ)) xảy ra tại $\bar{x}$ nếu (SACQ) (tương ứng, (SVC-ACQ)) xảy ra tại $\bar{x}$ theo hướng $v \in T(\Omega', \bar{x})$.

Mệnh đề 6.2. (Điều kiện cần dạng gốc) *Cho $\bar{x} \in \Omega'$ là nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán (P').*

(i) *Nếu (SACQ) xảy ra tại $\bar{x}$ theo hướng tới hạn $v \in (\hat{\mathcal{C}}_T(\bar{x}) \backslash \mathcal{C}_0(f, \bar{x})) \setminus$*

$\{0\}$, *thì không tồn tại* $(d, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ *sao cho hệ sau thỏa mãn*

$$\begin{cases} \langle \nabla f_i(\bar{x}), d\rangle + s\langle \nabla^2 f_i(\bar{x})v, v\rangle < 0, & \forall i \in I(\bar{x}, v), \\ \langle \nabla g_i(\bar{x}), d\rangle + s\langle \nabla^2 g_i(\bar{x})v, v\rangle \le 0, & \forall i \in I_g(\bar{x}, v), \\ -\big(\langle \nabla H_i(\bar{x}), d\rangle + s\langle \nabla^2 H_i(\bar{x})v, v\rangle\big) \le 0, & \forall i \in \hat{I}_{00}(\bar{x}, v) \cup I_{0-}(\bar{x}, v), \\ \langle \nabla G_i(\bar{x}), d\rangle + s\langle \nabla^2 G_i(\bar{x})v, v\rangle \le 0, & \forall i \in I_{+0}(\bar{x}, v), \\ \langle \nabla h_i(\bar{x}), d\rangle + s\langle \nabla^2 h_i(\bar{x})v, v\rangle = 0, & \forall i \in I_h, \\ \langle \nabla H_i(\bar{x}), d\rangle + s\langle \nabla^2 H_i(\bar{x})v, v\rangle = 0, & \forall i \in I_{0+}. \end{cases} \tag{6.11}$$

(ii) *Nếu (SVC-ACQ) xảy ra tại* $\bar{x}$ *theo hướng tới hạn* $v \in (\hat{\mathcal{C}}_{T(VC)}(\bar{x}) \backslash \mathcal{C}_0(f, \bar{x})) \backslash \{0\}$, *thì không tồn tại* $(d, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ *sao cho hệ sau thỏa mãn*

$$\begin{cases} \langle \nabla f_i(\bar{x}), d\rangle + s\langle \nabla^2 f_i(\bar{x})v, v\rangle < 0, & \forall i \in I(\bar{x}, v), \\ \langle \nabla g_i(\bar{x}), d\rangle + s\langle \nabla^2 g_i(\bar{x})v, v\rangle \le 0, & \forall i \in I_g(\bar{x}, v), \\ -\big(\langle \nabla H_i(\bar{x}), d\rangle + s\langle \nabla^2 H_i(\bar{x})v, v\rangle\big) \le 0, & \forall i \in \hat{I}_{00}(\bar{x}, v) \cup I_{0-}(\bar{x}, v), \\ \langle \nabla G_i(\bar{x}), d\rangle + s\langle \nabla^2 G_i(\bar{x})v, v\rangle \le 0, & \forall i \in I_{+0}(\bar{x}, v) \cup I_{00}(\bar{x}, v), \\ \langle \nabla h_i(\bar{x}), d\rangle + s\langle \nabla^2 h_i(\bar{x})v, v\rangle = 0, & \forall i \in I_h, \\ \langle \nabla H_i(\bar{x}), d\rangle + s\langle \nabla^2 H_i(\bar{x})v, v\rangle = 0, & \forall i \in I_{0+}. \end{cases} \tag{6.12}$$

Định nghĩa 6.5. Cho $\bar{x} \in \Omega'$.
(i) Giả sử $\bar{x}$ là điểm dừng mạnh của bài toán (P'). *Tập tất cả các nhân tử mạnh* $(\alpha, \lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H)$ ứng với điểm $\bar{x}$ được xác định bởi

$$\begin{aligned} M(\bar{x}) := \{(\alpha, \lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H) \in \mathbb{R}^m_+ \times \Lambda(\bar{x}) \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \setminus \{\mathbf{0}\} \mid \\ \lambda^H_{I_+} = 0, \lambda^H_{I_{00} \cup I_{0-}} \ge 0, \lambda^G_{I_{+-} \cup I_0} = 0, \lambda^G_{I_{+0}} \ge 0, \end{aligned}$$

$$\sum_{i \in I} \alpha_i \nabla f_i(\bar{x}) + \sum_{i \in J} \lambda^g_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{i \in I_h} \lambda^h_i \nabla h_i(\bar{x}) - \sum_{i \in I_l} \lambda^H_i \nabla H_i(\bar{x}) + \sum_{i \in I_l} \lambda^G_i \nabla G_i(\bar{x}) = 0\}. \tag{6.14}$$

(ii) Giả sử $\bar{x}$ là điểm dừng VC của bài toán (P'). *Tập các nhân tử VC* $(\alpha, \lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H)$ ứng với điểm $\bar{x}$ được xác định bởi

$$M^{VC}(\bar{x}) := \{(\alpha, \lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H) \in \mathbb{R}^m_+ \times \Lambda(\bar{x}) \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \setminus \{\mathbf{0}\} \mid \lambda^H_{I_+} = 0, \lambda^H_{I_{00}\cup I_{0-}} \geq 0, \lambda^G_{I_{+-}\cup I_{0+}\cup I_{0-}} = 0, \lambda^G_{I_{+0}\cup I_{00}} \geq 0,$$

$$\sum_{i\in I} \alpha_i \nabla f_i(\bar{x}) + \sum_{i\in J} \lambda^g_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{i\in I_h} \lambda^h_i \nabla h_i(\bar{x}) - \sum_{i\in I_l} \lambda^H_i \nabla H_i(\bar{x}) + \sum_{i\in I_l} \lambda^G_i \nabla G_i(\bar{x}) = 0\}. \tag{6.15}$$

Với $v \in L(\bar{x})$, ta kí hiệu $M(\bar{x}, v)$ (tương ứng, $M^{VC}(\bar{x}, v)$) là tập tất cả các nhân tử $(\alpha, \lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H) \in M(\bar{x})$ (tương ứng, $M^{VC}(\bar{x})$), mà nó phụ thuộc vào hướng v.

Mệnh đề 6.3. (Điều kiện cần đối ngẫu) *Cho $\bar{x} \in \Omega'$ là nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán (P').*

(i) *Nếu $v \in (\hat{\mathcal{C}}_T(\bar{x}) \backslash \mathcal{C}_0(f, \bar{x})) \setminus \{0\}$ và (SACQ) xảy ra tại $(\bar{x}, v)$, thì tồn tại $(\alpha, \lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H) \in M(\bar{x}, v)$ sao cho*

$$\Big\langle \Big(\sum_{i\in I} \alpha_i \nabla^2 f_i(\bar{x}) + \sum_{i\in J} \lambda^g_i \nabla^2 g_i(\bar{x}) + \sum_{i\in I_h} \lambda^h_i \nabla^2 h_i(\bar{x}) - \sum_{i\in I_l} \lambda^H_i \nabla^2 H_i(\bar{x}) + \sum_{i\in I_l} \lambda^G_i \nabla^2 G_i(\bar{x}) \Big) v, v \Big\rangle \geq 0. \tag{6.16}$$

(ii) *Nếu $v \in (\hat{\mathcal{C}}_{T(VC)}(\bar{x}) \backslash \mathcal{C}_0(f, \bar{x})) \setminus \{0\}$ và (SVC-ACQ) xảy ra tại $(\bar{x}, v)$, thì tồn tại $(\alpha, \lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H) \in M^{VC}(\bar{x}, v)$ sao cho (6.16) xảy ra.*

6.2 Điều kiện đủ tối ưu cấp hai

Mệnh đề 6.4. (Điều kiện đủ dạng đối ngẫu) *Cho $\bar{x} \in \Omega'$ là điểm chấp nhận được của bài toán (P'). Nếu với mỗi hướng tới hạn $v \in \hat{\mathcal{C}}_T(\bar{x}) \backslash \{0\}$, tồn tại các nhân tử $(\alpha, \lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H) \in M(\bar{x}, v)$ sao cho*

$$\Big\langle \Big(\sum_{i\in I} \alpha_i \nabla^2 f_i(\bar{x}) + \sum_{i\in I'_g} \lambda^g_i \nabla^2 g_i(\bar{x}) + \sum_{i\in I_h} \lambda^h_i \nabla^2 h_i(\bar{x}) - \sum_{i\in I_l} \lambda^H_i \nabla^2 H_i(\bar{x}) + \sum_{i\in I_l} \lambda^G_i \nabla^2 G_i(\bar{x}) \Big) v, v \Big\rangle > 0. \tag{6.21}$$

thì $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu địa phương của bài toán (P').

Mệnh đề 6.5. (Điều kiện đủ dạng đối ngẫu) *Cho $\bar{x} \in \Omega'$ là nghiệm chấp nhận được của bài toán (P'). Nếu với mỗi hướng tới hạn $v \in \hat{\mathcal{C}}_{T(VC)}(\bar{x}) \backslash \{0\}$, tồn tại nhân tử $(\alpha, \lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H) \in M^{VC}(\bar{x}, v)$ sao cho*

$$\Big\langle \Big(\sum_{i\in I} \alpha_i \nabla^2 f_i(\bar{x}) + \sum_{i\in I'_g} \lambda^g_i \nabla^2 g_i(\bar{x}) + \sum_{i\in I_h} \lambda^h_i \nabla^2 h_i(\bar{x}) - \sum_{i\in I_l} \lambda^H_i \nabla^2 H_i(\bar{x}) + \sum_{i\in I_l} \lambda^G_i \nabla^2 G_i(\bar{x}) \Big) v, v \Big\rangle > 0. \tag{6.25}$$

thì $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu địa phương của bài toán (P').

Mệnh đề 6.6. (Điều kiện đủ dạng gốc) *Cho $\bar{x} \in \Omega'$ là điểm chấp nhận được của bài toán (P'). Nếu với mỗi hướng tới hạn $v \in \hat{\mathcal{C}}_T(\bar{x})\backslash\{0\}$, hệ sau không có nghiệm $d \in \mathbb{R}^n$*

$$\begin{cases} \langle \nabla f_i(\bar{x}), d\rangle + \langle \nabla^2 f_i(\bar{x})v, v\rangle \le 0, & \forall i \in I(\bar{x}, v), \\ \langle \nabla g_i(\bar{x}), d\rangle + \langle \nabla^2 g_i(\bar{x})v, v\rangle \le 0, & \forall i \in I_g(\bar{x}, v), \\ -\big(\langle \nabla H_i(\bar{x}), d\rangle + \langle \nabla^2 H_i(\bar{x})v, v\rangle\big) \le 0, & \forall i \in \hat{I}_{00}(\bar{x}, v) \cup I_{0-}(\bar{x}, v), \\ \langle \nabla G_i(\bar{x}), d\rangle + \langle \nabla^2 G_i(\bar{x})v, v\rangle \le 0, & \forall i \in I_{+0}(\bar{x}, v), \\ \langle \nabla h_i(\bar{x}), d\rangle + \langle \nabla^2 h_i(\bar{x})v, v\rangle = 0, & \forall i \in I_h, \\ \langle \nabla H_i(\bar{x}), d\rangle + \langle \nabla^2 H_i(\bar{x})v, v\rangle = 0, & \forall i \in I_{0+}. \end{cases} \tag{6.28}$$

Khi đó, $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu địa phương của bài toán (P').

Mệnh đề 6.7. (Điều kiện đủ dạng gốc) *Cho $\bar{x} \in \Omega'$ là một điểm chấp nhận được của bài toán (P'). Nếu với mỗi hướng tới hạn $v \in \hat{\mathcal{C}}_{T(VC)}(\bar{x})\backslash\{0\}$, hệ sau không có nghiệm $d \in \mathbb{R}^n$*

$$\begin{cases} \langle \nabla f_i(\bar{x}), d\rangle + \langle \nabla^2 f_i(\bar{x})v, v\rangle \le 0, & \forall i \in I(\bar{x}, v), \\ \langle \nabla g_i(\bar{x}), d\rangle + \langle \nabla^2 g_i(\bar{x})v, v\rangle \le 0, & \forall i \in I_g(\bar{x}, v), \\ -\big(\langle \nabla H_i(\bar{x}), d\rangle + \langle \nabla^2 H_i(\bar{x})v, v\rangle\big) \le 0, & \forall i \in \hat{I}_{00}(\bar{x}, v) \cup I_{0-}(\bar{x}, v), \\ \langle \nabla G_i(\bar{x}), d\rangle + \langle \nabla^2 G_i(\bar{x})v, v\rangle \le 0, & \forall i \in I_{+0}(\bar{x}, v) \cup I_{00}(\bar{x}, v), \\ \langle \nabla h_i(\bar{x}), d\rangle + \langle \nabla^2 h_i(\bar{x})v, v\rangle = 0, & \forall i \in I_h, \\ \langle \nabla H_i(\bar{x}), d\rangle + \langle \nabla^2 H_i(\bar{x})v, v\rangle = 0, & \forall i \in I_{0+}, \end{cases} \tag{6.29}$$

thì $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu địa phương của bài toán (P').

Mệnh đề 6.8. *Giả sử $f_i (i \in I)$, $g_i(i \in I'_g), -H_i(i \in I_{00} \cup I_{0-}), G_i(i \in I_{+0})$ là các hàm tựa lồi tại $\bar{x}$ và $h_i(i \in I_h), H_i(i \in I_{0+})$ tựa tuyến tính* *tại $\bar{x}$. Hơn nữa, giả sử rằng với mỗi hướng $d \neq 0$, tồn tại các nhân tử $(\bar{\alpha}, \bar{\lambda}^g, \bar{\lambda}^h, \bar{\lambda}^G, \bar{\lambda}^H) \in M(\bar{x}, d)$ sao cho*

$$\Big\langle \Big(\sum_{i\in I} \bar{\alpha}_i \nabla^2 f_i(\bar{x}) + \sum_{i\in J} \bar{\lambda}_i^g \nabla^2 g_i(\bar{x}) + \sum_{i\in I_h} \bar{\lambda}_i^h \nabla^2 h_i(\bar{x}) - \sum_{i\in I_l} \bar{\lambda}_i^H \nabla^2 H_i(\bar{x}) + \sum_{i\in I_l} \bar{\lambda}_i^G \nabla^2 G_i(\bar{x}) \Big) d, d \Big\rangle > 0. \tag{6.30}$$

Khi đó, $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu của bài toán (P').

Mệnh đề 6.9. *Giả sử $f_i(i \in I)$, $g_i(i \in I'_g), -H_i(i \in I_{00} \cup I_{0-}), G_i(i \in I_{+0} \cup I_{00})$ là các hàm tựa lồi tại $\bar{x}$ và $h_i(i \in I_h), H_i(i \in I_{0+})$ là các hàm tựa tuyến tính tại $\bar{x}$. Hơn nữa, giả sử với mỗi hướng $d \neq 0$, tồn tại $(\bar{\alpha}, \bar{\lambda}^g, \bar{\lambda}^h, \bar{\lambda}^G, \bar{\lambda}^H) \in M^{VC}(\bar{x}, d)$ sao cho*

$$\Big\langle \Big(\sum_{i\in I} \bar{\alpha}_i \nabla^2 f_i(\bar{x}) + \sum_{i\in J} \bar{\lambda}_i^g \nabla^2 g_i(\bar{x}) + \sum_{i\in I_h} \bar{\lambda}_i^h \nabla^2 h_i(\bar{x}) - \sum_{i\in I_l} \bar{\lambda}_i^H \nabla^2 H_i(\bar{x}) + \sum_{i\in I_l} \bar{\lambda}_i^G \nabla^2 G_i(\bar{x}) \Big) d, d \Big\rangle > 0. \tag{6.32}$$

Khi đó, $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu của bài toán (P').

6.3 Kết luận Chương 6

Trong chương này, chúng tôi đã thiết lập được cả hai dạng gốc và đối ngẫu điều kiện cần tối ưu cấp hai cho bài toán tối ưu đa mục tiêu với ràng buộc biến mất bằng cách sử dụng định tính ràng buộc cấp hai (SACQ) và (SVC-ACQ). Sau đó, chúng tôi đề xuất cả hai dạng gốc và đối ngẫu của các điều kiện đủ tối ưu cấp hai cho bài toán này. Tính hợp lệ của các kết quả này cũng được kiểm tra lại bằng các ví dụ cụ thể. Theo tìm hiểu của chúng tôi, đây là các kết quả đầu tiên xem xét điều kiện tối ưu cấp hai cho bài toán tối ưu đa mục tiêu với ràng buộc biến mất. Hơn nữa, chúng tôi cũng xét nón tiếp tuyến chiếu cấp hai bao gồm cả tập tiếp tuyến cấp hai và nón tiệm cận cấp hai trong các định tính ràng buộc cấp hai.

Chương 7.

Kết luận và kiến nghị

Trong luận án này, chúng tôi đề xuất khái niệm trên đạo hàm tiếp tuyến cấp cao (Định nghĩa 4.2), các tính chất cơ bản của khái niệm này (Mệnh đề 4.4, 4.5 và 4.6). Áp dụng trên đạo hàm tiếp tuyến cấp cao cho lớp bài toán này để nghiên cứu nghiệm chính thường theo nghĩa Benson, nghiên cứu các quan hệ đối ngẫu yếu, đối ngẫu mạnh, đối ngẫu ngược (Định lý 4.1, 4.2, 4.3, Hệ quả 4.2) giữa bài toán gốc và các bài toán đối ngẫu dạng Wolfe và đối ngẫu dạng Mond-Weir.

Chúng tôi thiết lập các mô hình đối ngẫu Lagrange dạng vectơ và đối ngẫu Lagrange dạng vô hướng hóa để tìm các mối quan hệ đối ngẫu mạnh và đối ngẫu yếu giữa bài toán tối ưu đa mục tiêu nửa vô hạn với ràng buộc biến mất với bài toán đối ngẫu (Mệnh đề 5.1, 5.2, 5.4, 5.5 và 5.7). Khảo sát và thu được quan hệ đối ngẫu dưới các giả thiết lồi (Mệnh đề 5.3, 5.6 và 5.8). Đối với mỗi mô hình, chúng tôi xem xét các mối quan hệ giữa tính đối ngẫu mạnh và điều kiện tối ưu điểm yên ngựa cho các dạng bài toán này (Mệnh đề 5.9, 5.10, 5.11, 5.12, 5.13 và 5.14).

Chúng tôi thiết lập cả hai dạng gốc và đối ngẫu điều kiện tối ưu cần cấp hai (Mệnh đề 6.2 và 6.3) cho bài toán tối ưu đa mục tiêu với ràng buộc biến mất bằng cách sử dụng định tính ràng buộc cấp hai (SACQ) và (SVC-ACQ). Đề xuất cả hai dạng gốc và đối ngẫu của điều kiện đủ tối ưu cấp hai cho bài toán này (Mệnh đề 6.4, 6.5, 6.6 và 6.7). Chúng tôi đưa ra điều kiện đủ tối ưu cấp hai cho điểm chấp nhận được là nghiệm hữu hiệu của bài toán với hướng bất kỳ (Mệnh đề 6.8 và 6.9).

Trong thời gian tới, chúng tôi tiếp tục nghiên cứu các phép toán của trên đạo hàm tiếp tuyến cấp cao cho ánh xạ đa trị. Ngoài ra, chúng tôi cũng tiếp tục nghiên cứu các điều kiện tối ưu và đối ngẫu Lagrange cho bài toán tối ưu đa mục tiêu nửa vô hạn với ràng buộc biến mất bằng cách sử dụng trên đồ thị của các hàm liên hợp với công cụ là các đạo hàm suy rộng khác của ánh xạ đơn trị. Các kết quả về điều kiện đối ngẫu Lagrange, điều kiện tối ưu điểm yên ngựa, các điều kiện tối ưu cấp hai,... cũng có thể được khái quát hóa cho các bài toán tối ưu đa mục tiêu không trơn với ràng buộc biến mất và ràng buộc cân bằng.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC

[A1] **Tran Thien Khai**, Nguyen Le Hoang Anh, Nguyen Manh Truong Giang (2021). Higher-order tangent epiderivatives and applications to duality in set-valued optimization. Positivity, 25, 1699–1720.

[A2] Le Thanh Tung, Dang Hoang Tam, **Tran Thien Khai** (2024). Lagrange duality and Saddle point optimality conditions for multiobjective semi-infinite programming with vanishing constraints. Numerical Functional Analysis and Optimization, 45(1), 44–81.

[A3] Le Thanh Tung, **Tran Thien Khai**, Trinh Tung (2023). Second-order optimality conditions for multiobjective programming with vanishing constraints. Submitted to Computational and Applied Mathematics.